Übungen zu Computational Physics — Blatt 1

Michael Bestehorn SoSe 2019

Aufgabe 1: Abbildungen I, Logistische Abbildung

1. Berechnen Sie den Zweierzyklus der logistischen Abbildung.
2. Zeigen Sie, dass dieser für $a > 1 + \sqrt{6}$ instabil wird.
3. Geben Sie einen analytischen Ausdruck für den Lyapunov-Exponenten λ der logistischen Abbildung im Bereich $0 < a < 1 + \sqrt{6}$ an. Berechnen Sie die Polstellen, das sind die "superstabilen Zyklen", von λ.

Aufgabe 2: Abbildungen II, Kreisabbildung

Bei der Kreisabbildung handelt es sich um eine zweidimensionale Abbildung der Form

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n + y^n - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x^n) \\ y^{n+1} &= y^n - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x^n)\ . \end{aligned} \tag{1}$$

mit dem einzigen Kontrollparameter K.

1. Berechnen Sie die zweifach iterierte Abbildung
$$\begin{aligned} x^{n+2} &= f(x^n, y^n) \\ y^{n+2} &= g(x^n, y^n)\ . \end{aligned} \tag{2}$$
2. Wie lauten die Fixpunkte von (2)? Existieren Fixpunkte für alle K?
3. Berechnen Sie die Stabilität der Fixpunkte von (2) in Abhängigkeit von K.

– bitte wenden –

Aufgabe 3: Dynamische Systeme I, Räuber-Beute-Modell

Die beiden gekoppelten Ratengleichungen

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 &= \alpha_1 n_1 - \alpha_2 n_1 n_2 \\ \dot{n}_2 &= -\beta_1 n_2 + \beta_2 n_1 n_2 \ , \qquad \alpha_i,\ \beta_i > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

wurden von Lotka (1920) und Volterra (1931) vorgeschlagen, um die Wechselwirkung zwischen einer Beute- $(n_1(t))$ und einer Räuberpopulation $(n_2(t))$ zu beschreiben. Die Gleichungen (1) werden heute als "Lotka-Volterra-Modell" bezeichnet und gelten als einfachstes Räuber-Beute-System.

1. Interpretieren Sie die einzelnen Terme in (1). Zeigen Sie durch Skalieren von Zeit, n_1 und n_2 dass sich (1) schreiben lässt als

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{n}}_1 &= a\tilde{n}_1 - \tilde{n}_1\tilde{n}_2 \\ \dot{\tilde{n}}_2 &= -\tilde{n}_2 + \tilde{n}_1\tilde{n}_2 \ , \qquad a > 0 \end{aligned} \tag{2}$$

2. Geben Sie die Fixpunkte von (2) an und untersuchen Sie deren Stabilität.
3. Zeigen Sie, dass

$$W(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2) = \tilde{n}_1 + \tilde{n}_2 - \ln \tilde{n}_1 - a \ln \tilde{n}_2 \tag{3}$$

   unter der Dynamik von (2) erhalten bleibt.
4. Lösen Sie jetzt (2) numerisch und prüfen Sie die Erhaltung von (3). Plotten Sie Trajektorien im Phasenraum für verschiedene a und verschiedene Anfangsbedingungen.

Aufgabe 4: Dynamische Systeme II, die Lorenz-Gleichungen

In den 60ger Jahren leitete Edward Lorenz ein System von drei gekoppelten DGLs zur Wettervorhersage ab. Sie lauten:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -\alpha\,(y_1 - y_2) \\ \frac{dy_2}{dt} &= r\,y_1 - y_2 - y_1 y_3 \\ \frac{dy_3}{dt} &= -\beta\,y_3 + y_1 y_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei sind α, $\beta > 0$ Systemparameter und $r > 0$ ein Kontrollparameter (Bifurkationsparameter).

Berechnen Sie die Fixpunkte von (1) und deren Stabilität. Hinweis: Es gibt zwei Fixpunkte, den trivialen $(y_i = 0)$ und einen anderen.