Übungen zu Computational Physics Blatt 2

Michael Bestehorn SoSe 2019

Aufgabe 5: Dynamische Systeme III, Van der Pol-Oszillator

Die Van der Polsche Differentialgleichung lautet

$$\ddot{x} - \mu\,(1 - x^2)\,\dot{x} + x = 0, \qquad x(t)\,\epsilon\,\mathcal{R} \tag{1}$$

mit $\mu\,\epsilon\,\mathcal{R}$ als Kontrollparameter.

1. Formulieren Sie (1) als DGL-System 1. Ordnung

$$d_t\vec{x} = \vec{f}(\vec{x}), \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

   Bestimmen Sie den Fixpunkt und untersuchen Sie seine Stabilität.

2. Bestimmen Sie für $|\mu| \ll 1$ die Normalform zu (1).

   <u>Hinweise zu 2.:</u>

   Berechnen Sie zunächst die Eigenvektoren $\vec{u}$, $\vec{u}^+$ der Jacobi-Matrix $\underline{L}$ des DGL-Systems (2):

$$\underline{L}\,\vec{u} = \lambda\vec{u}, \qquad \underline{L}^+\,\vec{u}^+ = \lambda\vec{u}^+ \tag{3}$$

   mit $L^+_{ij} = L_{ji}$ als adjungierte Jacobi-Matrix. Verwenden Sie dann als Lösung von (2) den Ansatz

$$\vec{x}(t) = \xi_1(t)\,\vec{u}_1 + \xi_2(t)\,\vec{u}_2, \qquad \xi_i(t),\,\vec{u}_i\,\epsilon\,\mathcal{C} \tag{4}$$

   Welcher Zusammenhang muss zwischen ξ_1 und ξ_2 bestehen? Leiten Sie jetzt eine DGL für ξ_1 durch Projektion von (2) auf $\vec{u}_1^+$ her. Berücksichtigen Sie nur die niedrigste Ordnung von μ und nur resonante Terme[1]. Das Ergebnis (Hopf-Normalform) sollte so aussehen:

$$\dot{\xi}_1 = \sigma\,\xi_1 + c\,|\xi_1^2|\xi_1\,. \tag{5}$$

   Was erhalten Sie für σ und c?

3. Lösen Sie (5) analytisch. Skizzieren Sie Trajektorien im Phasenraum $(x, \dot{x})$ für verschiedene Anfangsbedingungen. Diskutieren Sie die Fälle $\mu > 0$ und $\mu < 0$. Was ergibt sich für $t \to \infty$?

4. Lösen Sie (1) numerisch und vergleichen Sie das Resultat mit der Näherungslösung von (5).

[1] Darunter versteht man nichtlineare Terme $\xi^n\xi^{*m}$ die dasselbe Frequenzverhalten wie ξ zeigen, also für die $n - m = 1$ gilt.