Übungen zu Computational Physics Blatt 3

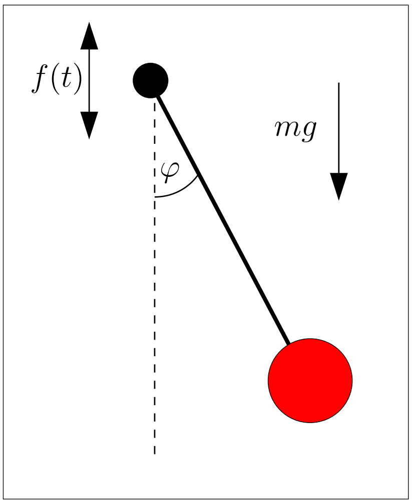
Michael Bestehorn SoSe 2019

Aufgabe 6: Dynamische Systeme III, Parametrische Instabilität

Ein Pendel besteht aus einem Massepunkt (m) an einer reibungsfrei im Ursprung aufgehängten, masselosen Stange der Länge L. Diese soll sich in der xy-Ebene bewegen. Es wirkt die Kraft mg in vertikaler Richtung (siehe Skizze). Der Aufhängepunkt des Pendels soll sich gemäß einer vorgegebenen periodischen Funktion $f(t)$ in vertikaler Richtung bewegen, es soll also

$$f(t+T) = f(t), \qquad f(0) = 0$$

gelten.



Beschränken Sie sich während der ganzen Aufgabe auf kleine Auslenkungen, d.h. $\sin(\varphi) \approx \varphi$ kann angenommen werden.

1. Leiten Sie die Gleichung

$$\ddot{\varphi} + \left(\omega_0^2 + f_2(t)\right)\varphi = 0, \qquad f_2(t) = \ddot{f}(t)/L, \qquad \omega_0^2 = g/L \tag{1}$$

   her und bringen Sie diese auf die Form

$$d_t\vec{x} = \underline{L}(t) \cdot \vec{x}\ , \tag{2}$$

   wobei $\vec{x} = (\varphi, \dot{\varphi})$ bezeichnet.

2. Als Floquet-Multiplikatoren werden die Eigenwerte σ_i der Monodromie-Matrix $\underline{C}$ bezeichnet. Integriert man (2) mit den beiden Anfangsbedingungen

$$\vec{x}_1(0) = (1, 0), \qquad \vec{x}_2(0) = (0, 1) \tag{3}$$

   bis T, so ergibt sich $\underline{C}$ als

$$\underline{C} = (\vec{x}_1(T), \vec{x}_2(T))\ .$$

   Berechnen Sie $\underline{C}$ analytisch für den trivialen Fall $f = f_2 = 0$. Die "Periodenlänge" T bleibt als Parameter stehen. Bestimmen Sie σ_i sowie die Floquet-Exponenten

$$\lambda_i = \frac{1}{T}\ln(\sigma_i)\ .$$

3. Eine weitere analytische Form für $\underline{C}$ erhält man für den Fall einer stückweise konstanten Beschleunigung

$$f_2(t) = \begin{cases} b & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ -b & \text{für } 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad . \tag{4}$$

   Skizzieren Sie für diesen Fall $f(t)$. Bestimmern Sie $\underline{C}$. Für die Stabilitätsbedingung $|\sigma_i| \leq 0$ erhalten Sie eine transzendente Gleichung. Zeichnen Sie (numerisch) das Stabilitätsdiagramm, d.h. die Linien mit $|\sigma_i| = 1$, in der (ω_0^2, b)-Ebene.

4. Untersuchen Sie jetzt das gedämpfte Pendel

$$\ddot{\varphi} + 2\alpha\dot{\varphi} + \left(\omega_0^2 + f_2(t)\right)\varphi = 0, \qquad \alpha > 0 \; . \tag{5}$$

   Verwenden Sie die Transformation

$$\varphi(t) = \phi(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

   um (5) in die Form (1) zu bringen, allerdings mit einer anderen Resonanzfrequenz ω_1.

   Diskutieren Sie wieder die Fälle $f = f_2 = 0$ und $f_2(t)$ nach (4).

5. Die Anregung

$$f_2(t) = b\sin(\Omega t)$$

   führt für $\alpha = 0$ auf die Mathieu-Gleichung, für $\alpha > 0$ auf die Hill-Gleichung. In beiden Fällen kann $\underline{C}$ nur noch numerisch gefunden werden. Integrieren Sie dazu (2), z.B. mit einem Runge-Kutta-Verfahren, mit den beiden Anfangsbedingungen (3) und zeichnen Sie das Stabilitätsdiagramm für $\Omega = 1$.