Übungen zu Computational Physics — Blatt 4

Michael Bestehorn SoSe 2019

Aufgabe 7: Partielle Differentialgleichungen, Wärmeleitgleichung

Die Wärmeleitgleichung lautet in drei räumlichen Dimensionen

$$\rho C \partial_t T(\vec{r}, t) = \nabla \left(\lambda \nabla T(\vec{r}, t) \right) \tag{1}$$

mit der Wärmeleitfähigkeit λ, der Dichte ρ und der spezifischen Wärme C des entsprechenden Materials. Die Wärmeleitgleichung (1) vereinfacht sich für konstantes $\lambda = \lambda_0$ zu

$$\partial_t T(\vec{r}, t) = \kappa \Delta T(\vec{r}, t) \tag{2}$$

mit der Temperaturleitfähigkeit $\kappa = \lambda_0 / \rho C$.

1. Lösen Sie (2) in einem unendlichen Raum mit der Anfangsbedingung

   $$T(\vec{r}, 0) = \vartheta_0 \delta(\vec{r}) \ .$$

   Hinweis: verwenden Sie die Fourier-Transformierte $A(\vec{k}, t)$ gemäß

   $$T(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{k}\, A(\vec{k}, t)\, \mathrm{e}^{-i\vec{k}\vec{r}} \ .$$

2. Verifizieren Sie mit dem Ergebnis aus 1.) den Satz:

   Für eine allgemeine Anfangsbedingung

   $$T(\vec{r}, 0) = T_0(\vec{r})$$

   lautet die Lösung von (2)

   $$T(\vec{r}, t) = \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{3/2}} \int_V T_0(\vec{r}\,')\, \mathrm{e}^{-\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')^2}{4\kappa t}}\, d^3\vec{r}\,' \ .$$

3. Diese und die folgenden Teilaufgaben sind in einer Dimension zu berechnen.

   Wie lautet die Lösung von (2) im unendlichen Halbraum $x \geq 0$ mit den Randbedingungen

   $$T(0, t) = T_0, \qquad T(x \to \infty, t) = 0$$

   und

   $$T(x, 0) = 0$$

   als Anfangsbedingung?

4. Berechnen Sie $T(x,t)$ für einen (unendlich dünnen) Stab der Länge L mit zunächst konstantem λ mit den Randbedingungen

$$T(0,t) = T_0, \qquad T(L,t) = T_1 \tag{3}$$

   und der Anfangsbedingung

$$T(x,0) = 0 \ .$$

   Hinweis: die Lösung lässt sich nur als unendliche Summe darstellen.

   Visualisieren Sie das Ergebnis z.B. mit Hilfe von Maple.

5. Geben Sie eine stationäre Lösung von (1) mit den Randbedingungen (3) für die beiden Fälle

$$\begin{aligned} (i) \qquad & \lambda &= \lambda_0 \\ (ii) \qquad & \lambda(x) &= \lambda_0 \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right) \end{aligned}$$

   an.

6. Verifizieren Sie die gefundenen Ergebnisse durch direktes numerisches Lösen der Gleichung (1), bzw. (2) mit Hilfe eines Finite-Differenzen-Verfahrens.